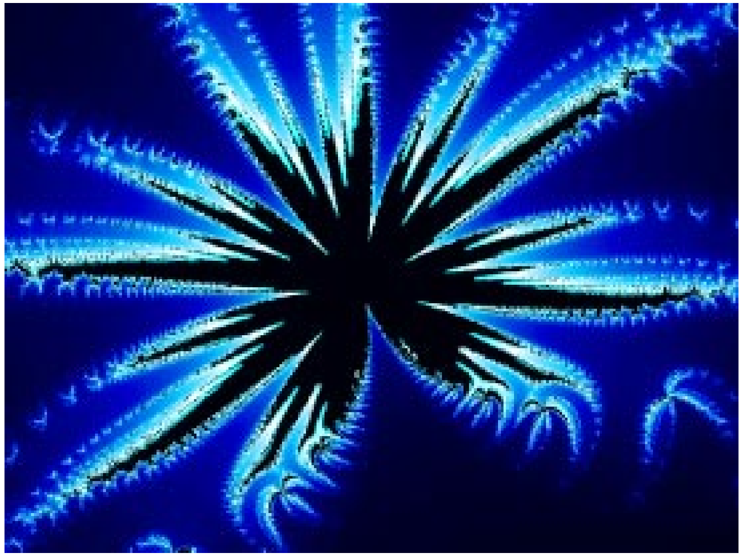


FRAKTALE GEOMETRIEN

Referat im Rahmen des Wahlpflichtfachs
„Bewegung im Raum in Bewegung“
bei Cornelie Leopold im SS 2000

Geschichte der Fraktale
Geometrie zwischen den Dimensionen
Fraktale in der Natur
Fraktale bezogen auf Architektur

Bearbeiter: Holger Müller Martin Reitemeier Björn van Rheenen

Geschichte der Fraktale

Der Begriff des Fraktals stammt aus dem Lateinischen. Das Wort frangere heißt übersetzt zerbrechen oder zerteilen.
Der Gedanke der Fraktale ist eigentlich sehr alt und reicht Jahrhunderte zurück. Zum ersten Mal fallen fraktale Strukturen in der Ravello Kathedrale in einem Altarbild auf (12.Jhd. n.Chr.). Auch bei Goethe findet sich der Grundgedanke in seinen späten Werken wie z.B. “Eins und Alles” wieder, welches über die ewigen Kreisläufe des Lebens schreibt. Hier zeigt sich schon, dass die Lehre über die Fraktale nicht nur mathematische Formeln ausmachen, sondern eine Ideologie oder Weltanschauung sein kann.

Die Ursprünge der fraktalen Geometrie reichen zurück in das 18. Jhd., als Georg Christoph Lichtenberg (Mathematiker/Physiker *1742) im Jahre 1777 zufällig bei Versuchen Staub auf den Elektrophor fiel. Der Staub nahm eine geometrische Figur an, die Lichtenberg wie folgt beschrieb: “...alles ist sich gleich, ein jeder Teil repräsentiert das Ganze.”
Damit schuf Lichtenberg auch den tragenden Begriff der fraktalen Geometrie, die Selbstähnlichkeit. Es war auch Lichtenberg, der die ersten Grundsätze der Chaostheorie beschrieb, wie es später Edward Lorenz in dem “Schmetterlingseffekt” darstellte (Die Entwicklung komplexer Systeme ist nur begrenzt vorausberechenbar). Mitte des vorigen Jahrhunderts ist auch die Geburt der Untersuchungen fraktaler Strukturen zu verzeichnen. Auf einem Mathematikkongress wurde versucht, stetige Kurven zu konstruieren, welche sich nicht ableiten ließen. Aus diesen Überlegungen gingen die sogenannten Monsterkurven hervor.

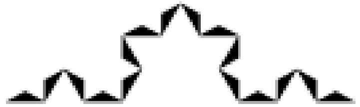
Eine der bekanntesten Kurven ist die “von Koch Schneeflockenkurve”. Von Koch war schwedischer Mathematiker und veröffentlichte seine Kurve 1904. Wenngleich von Koch als Mathematiker einen unbedeutenderen Ruf genoss, als seine Zeitgenossen Cantor und Sierpinsky, welche sich ebenfalls der Erforschung der Fraktale widmeten, nimmt seine Schneeflockenkurve einen hohen Stellenwert im geschichtlichen Ablauf um die Fraktale ein.

Georg Cantor war deutscher Mathematiker an der Universität Halle und schaffte sich seinen Weltruf unter anderem durch die Begründung der Mengenlehre. Schon 1883 veröffentlichte er die Cantor-Menge. Diese gilt als das wichtigste Element in der Entwicklung der Fraktale und fungiert als Gerüst und Modell hinter vielen anderen Fraktalen wie z.B. den Juliamengen.
Ein weiteres bedeutendes Fraktal wurde 1916 von Waclav Sierpinski vorgestellt: das Sierpinski-Dreieck. Sierpinski (1882-1969) war der wohl bedeutendste Mathematiker Polens und hatte Professuren in Lemberg und Warschau. In diesem Zusammenhang sollte auch noch der Menger-Schwamm erwähnt werden, welche im folgenden noch erklärt werden.

Im Jahr 1918 veröffentlichte Gaston Juliasein Werk “Abhandlungen über die Iteration rationeller Formen”. Julia, im ersten Weltkrieg schwer verletzt, schrieb sein Werk im Alter von 25 Jahren im Krankenhaus. Er gilt als der Stammvater der modernen Theorie der dynamischen Systeme und ist der Schöpfer der Julia Mengen. Diese Mengen sind in der komplexen Ebene beheimatet und unterliegen entweder der Forderung, dass die Punkte jeden Kreis um den Ursprung verlassen, oder einen bestimmten Kreis nie verlassen (Dichotomie). Nachdem die Juliamengen aus den zwanziger Jahren längere Zeit in Vergessenheit gerieten erfuhren sie durch Benoit B. Mandelbrot ihre Renaicance. Der polnische Mathematiker (*1924) widmete nach anfänglicher Ablehnung der Wissenschaft der Fraktale 1977 doch dieser Theorie und insbesondere den Julia Mengen.
Durch den Fortschritt in der Entwicklung größerer Rechner gelang es Mandelbrot die Juliamengen als Bilder abzubilden, indem er die Häufigkeit der Punkte in der Ebene mit Farben belegte und somit zu teilweise bizarren aber auch naturähnlichen Abbildungen kam, welche in den achtziger Jahren sehr erfolgreich als Bilder in die Kunstszene Eingang fanden.

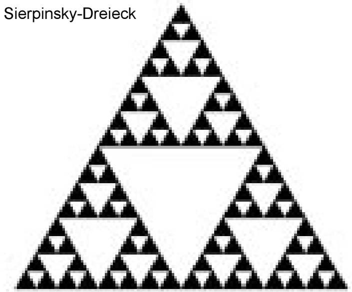
Aufgrund der hohen Komplexität war es bis dato nicht möglich gewesen die Fraktale in derartigen Bildern zu zeigen und ihre Darstellung fand weltweit große Beachtung. Hier zeigt sich auch die große Abhängigkeit der komplexen Systeme von unseren heutigen technischen Mitteln und die Enge Vernetzung heutiger Render und CAD Programme wird deutlich. – Mandelbrot haben wir auch das berühmte Mandelbrot oder Apfelmännchen zu verdanken und er gilt bis heute als der größte Protagonist der fraktalen Geometrie.
Seit ihrer Entdeckung ist ein heftiger Streit um die Bedeutung der fraktalen Geometrie entbrannt. Während Befürworter sie als den Ursprung der Natur und ihrer Formen bezeichnen, die sich durch die euklidischen Geometrien nur schwerlich beschreiben lassen, und sie als die Errungenschaft für die experimentelle Mathematik betrachten, tun die Gegner sie als eine sinnlose Mathematische Spielerei ab, sei es nun aus Furcht vor dem Verlust gewisser mathematischer Besonderheiten oder auch aus der Überzeugung, dass die Fraktale keinen größeren Sinn in sich bergen. Dieser Streit setzt sich auch in einer verwandten Disziplin, der Chaosforschung, fort, welche ebenfalls den Versuch einer mathematischen Auflösung von Komplexität im Laufe einer zeitlichen Entwicklung unternimmt.

Fakt ist, dass die Fraktale in den letzten Jahren an Bedeutung verloren haben und selbst im Bereich der Computergraphik ,insbesondere der Naturdarstellungen, durch weniger selbstähnliche Formen ersetzt wurden, die die Unregelmäßigkeiten der Natur präziser beschreiben. Dennoch bleibt bis heute die Frage offen, ob die Fraktale nur ein komplexes Gedankentraining großer Mathematiker war, oder ob sie unsere Wirklichkeit beschreiben.

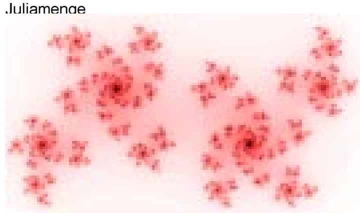


Schneeflockenkurve von Koch

Sierpinsky-Dreieck



Juliamenge



fraktal erstelltes Motiv

”Geometrie zwischen den Dimensionen”

Der Unterschied euklidische Geometrie - fraktale Geometrie:

In der abstrakten, euklidischen Welt spielt der Maßstab eine ganz andere Rolle als in der fraktalen Geometrie. Durch Vergrößerung uns bekannter Formen, wie z.B. einer Geraden ,einer Fläche ,eines Würfels, einer Kugel erfährt man nicht viel Neues über das jeweilige Objekt. Man geht in unstetigen Sprüngen von der eindimensionalen Geraden über das zweidimensionale Quadrat zum dreidimensionalen Würfel über.
Fraktale Formen hingegen entstehen durch Rückkopplungsterme: d.h. das Ergebnis einer Berechnung wird wieder in die Gleichung eingegeben, aus der es hervorgegangen ist. Dieses Ergebnis wird wiederum in die Gleichung eingesetzt, wobei dieser Vorgang beliebig oft wiederholt werden kann.Der Vorgang des ständigen Wiederholens der Gleichung nennt man Iteration. Es entstehen phantastisch komplexe und schöne Strukturen, die fraktale Selbstähnlichkeit besitzen. Diese Strukturen haben immer gebrochene Dimensionszahlen, z.B. 1,26186 für die Kochkurve, im Gegensatz zu den euklidischen Formen, die alle gerade Dimensionen aufweisen.
Um mit dem Begriff Dimension leichter umgehen zu können muß man ihn anhand eines einfachen Beispiels definieren:
Man verkleinert eine Fläche im Maßstab 1:3 , d.h. eine Teilfläche B kommt nun in der Gesamtfläche A neunmal vor .
Das Gleiche wird an einem Würfel angewandt. Ein kleiner Würfel ist eine Verkleinerung des Ausgangswürfels im Maßstab 1:3, wobei jetzt der große Würfel 27 kleine enthält.

$9=3^2$

$27=3^3$

d.h., die Dimension ist gerade der Exponent (2 oder 3 in dem Beispiel) in den die Meßzahl erhoben wird (3), um die Anzahl der kleineren Gebilde im Großen zu erhalten.In einer allgemeinen Definition kann man diesen Sachvehalt wie folgt beschreiben:
Wird ein Gebilde im Maßstab 1:n verkleinert und passen nun k von den kleineren Gebilden in das ursprüngliche , so ist die Selbstähnlichkeitsdimension des Gebildes die Zahl d, für die gilt:

n hoch d=k

Kochkurve

Man verkleinert die Ausgangskurve im Maßstab 1:3 . Das Ergebnis kommt in der ursprünglichen Kurve 4 mal vor. Wenn man diesen Sachverhalt in die zuvor definierte Gleichung einsetzt bedeutet dies: Die Dimension der Kochkurve ist die Zahl d, in die man 3 erheben muß, um 4 zu erhalten.

3 hoch d= 4

d= log4/log3= 1,26186

Der Mengerschwamm entsteht, indem man die Teilwürfel in den Mitten der Seitenflächen und in der Mitte des großen Würfels entfernt. Diesen so entstandenen Würfel setzt man zu einer Gesamtstruktur, die der Kleinen entspricht, zusammen. Wenn man sich die Oberfläche einer Zunge als eine poröses Gebilde vorstellt, das nach einem bestimmten Schema Öffnungen aufweist, so kann der Mengerschwamm theoretisch als eine Art Beschreibung der Zunge angesehen werden

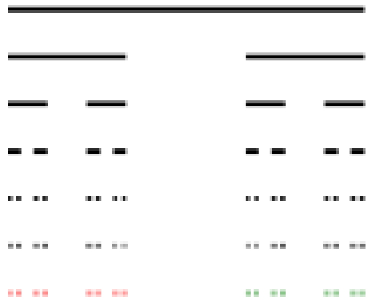
Lautermenge

Sie wird auch Staubmenge genannt, da eine Linie mit steigender Iteration zu vielen “Staubteilchen” zerfällt. Mandelbrot fand heraus, daß damit die Störung bei der Fernübertragungen von Computerdaten beschrieben werden kann.

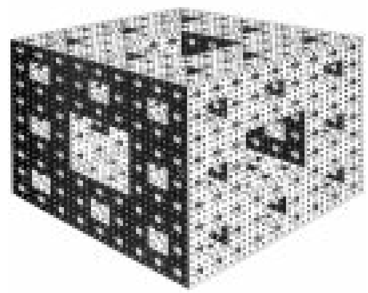
Eine der bekanntesten Strukturen kann man erzeugen, wenn man den Rechner eine Gleichung iterieren läßt, die eine bestimmte Menge an Zahlen enthält und nach Benoit Mandelbrot benannt wird.

An den zuvor gezeigten Beispielen erkennt man die Komplexität dieser Strukturen, die mittels des Computers sehr einfach und bequem erzeugt werden können. Betrachtet man das Apfelmännchen noch einmal genauer, so erkennt man, daß jede maßstäbliche Veränderung auch immer wieder eine neue Information über das Objekt bringt. Vergrößerungen zeigen verschiedene Juliamengen, die trotz ihrer Unterschiede Selbstähnlichkeit besitzen, denn alle sind aus den gleichen Grundstrukturen aufgebaut.Im Gegensatz dazu würde eine Vergrößerung einer Kugel keine neuen Erkenntnisse über die Kugel bringen. Dieser Sachverhalt veranlaßte Wissenschaftler, wie Mandelbrot über die euklidische Geometrie nachzudenken und herauszufinden auf welche Bereiche der Mathematik und Physik sie anzuwenden sei.

Anhand eines einfachen Beispiels erkannte Mandelbrot, daß man es in der Wirklichkeit selten mit euklidisch-abstrakten Formen zu tun hat.
Man stelle sich ein Wollknäuel vor. Aus einer Entfernung von 100m erscheint das Knäuel als Punkt (nulldimensional), wenn man sich näher heranzoomt bis auf eine Entfernung von 1m erscheint es als eine homogene dreidimensionale Kugel mit einer glatten Oberfläche. Wird dieses Garn jedoch aus einer Entfernung von 1 mm betrachtet so erkennt man einzelne Fäden, die wieder ein-bzw. zweidimensional sind . Mit noch höherer Auflösung werden Säulen sichtbar, bis man schließlich einzelne Atome erkennt.
An diesem Beispiel wird deutlich, daß das euklidische Konzept von Dimensionen nicht ohne Probleme auf reale Gegenstände anzuwenden ist, außer man bewegt sich zum Beispiel in den Sphären der modernen Kunst.
Diese Tatsache war bis vor kurzem noch der unumstrittene Ausgangspunkt für viele Wissenschaftler die fraktale Geometrie zur Beschreibung der Natur zu nutzen. Mittlerweile gibt es von einigen Gelehrten Zweifel an der uneingeschränkten Anwendbarkeit der Fraktalen .

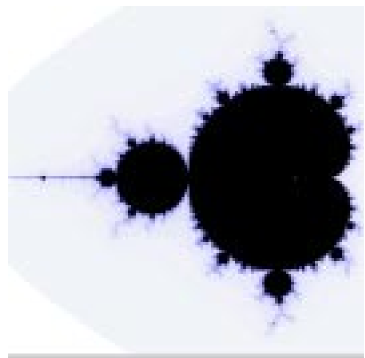


Lautermenge



Mengerschwamm

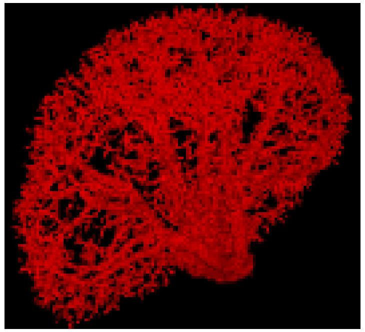
MandelbrotmännchenV



Fraktale in der Natur

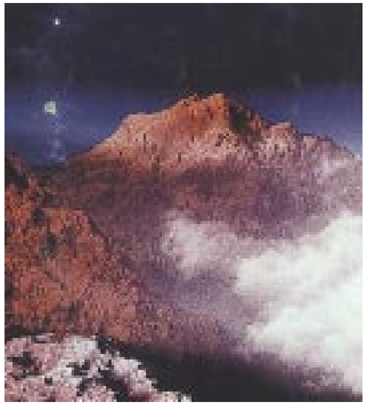
Durch die stetige Wiederholung eines Themas, das wieder das Gleiche ergibt, bauen sich komplexe Gebilde wie z.B. der Blumenkohl auf . Wenn man einen einzelnen Zweig seines Stamms abbrechen würde, so erhielte man nur ein Abbild seines Ganzen. Deshalb kann man ihn sich auch aus vielen gleichen Teilen zusammengesetzt vorstellen, wobei dann erst die Kombination den Kohl ergibt. Der Aufbau von Farnen und Bäumen ist ebenfalls Fraktal.
Auch uns weniger sichtbare Gebilde lassen sich ansatzweise mit der Fraktalen erklären. So zum Beispiel Blutgefäßsysteme im menschlichen Körper:
“Dreidimensionale Datensätze der Arterienverzweigung verschiedener Organe lassen sich nach der Korrosionsmethode von Polymerausgüssen der Gefäße nach einem Serienschnittverfahren oder mittels Mikro-NMR-Tomographie herstellen. Sie werden auf globale und lokale Skalierungseigenschaften mittels der Massen-Radius-Analyse untersucht. Das Arteriensystem eines Organs läßt sich als ein inhomogenes Fraktal charakterisieren aufgrund der räumlichen Dispersion der fraktalen Dimension. Die fraktale Struktur läßt sich in Beziehung setzen zu dem Skalenverhalten von Stoffwechselraten der Allometrie lebender Organismen”
Das Ziel dieser Untersuchungen sind Stoffwechselraten und allometrisches Wachstum von Organismen.

Man kann auch die Beschreibung der Natur in der umgekehrten Reihenfolge angehen. Diesmal wird nicht die Natur nachträglich mit der Fraktalen beschrieben, sondern man kreiert die Natur mittels der fraktalen Geometrie, indem man leistungsstarke Rechner Bilder berechnen läßt, die einer Fotografie täuschend ähnlich sind.



Blutgefäße der Niere

fraktal erstellte Landschaft



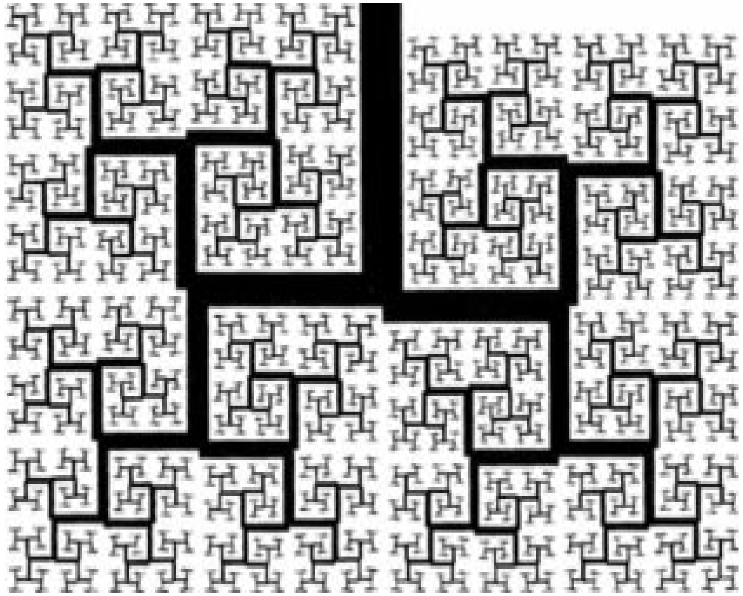
Fraktale bezogen auf Architektur

Da die Forschung nach Fraktalen noch relativ jung ist, sind noch nicht viele Bezüge zur Architektur hergestellt worden. Einige Prinzipien und Abbildungen von Fraktalen können jedoch architektonisch interpretiert werden. Die folgenden Abbildungen sind Beispiele dafür.

Die rechte Grafik zeigt das Prinzip von ebenfüllenden rekursiven Bronchien. Es ist eine schematische Darstellung für beispielsweise das Wachstum eines Baumes. Das Prinzip zeigt, daß jeder Zweig zwei Knospen bildet, die zu Zweigen heranwachsen und wiederum zwei knospen bilden usw. Dieses idealisierte Schema könnte als Prinzip eines städtebaulichen Konzeptes interpretiert werden, in dem die Verzweigungen ein Erschließungssystem beschreiben.

Das rechte Foto zeigt geplante und ungeplante Stadtviertel der Stadt Nouakchott, Hauptstadt Mauretaniens. Der geplante Teil der Stadt (rechts) erinnert mit seinen orthogonalen Strukturen und strengen Rasterfeldgrößen an Abbildungen fraktaler Strukturen.

“IFS” bezeichnet in der Mathematik wiederholende integrierte Funktionssysteme. Das Prinzip dieser Systeme ist auf der nächsten Seite anhand des Schriftzuges “IFS” dargestellt, der sich aus seinem Vielfachen zusammensetzt, dessen Komponenten wie-



ebenfüllende rekursive Bronchien

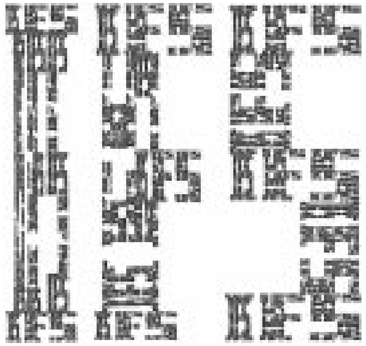
Nouakchott, Hauptstadt Mauretaniens

chen zusammengesetzt sind usw. Die Abbildung dieses fraktal kodierten Schriftzuges könnte beispielsweise vertretend für die Gestaltung einer Fassade stehen. Sie könnte ebenfalls aus dem Vielfachen eines Motivs wieder das gleiche Motiv bilden. Die Fassade würde also, je näher man an sie herantritt, immer wieder das gleiche Motiv zeigen.

In dem Buch “Fractal Geometry in Architecture and Design” von Carl Bovill wird das sogenannte “Box-Counting-System” beschrieben. Die Abbildung rechts zeigt dies am Beispiel des Robie-Hauses von Frank Loyd Wright. Dieses System befaßt sich mit den Informationsgehalten von Gesehenem bei verschiedenen Abständen, gemessen mit Hilfe eines über das Motiv gelegten Rasters. Die Größe des Rasters variiert, Abhängig vom Abstand. Es werden die Anzahl der Rasterflächen gezählt, die Information in Form von Linien beinhalten. Mit diesen Werten kann die fraktale Dimension errechnet werden. Es wird behauptet auf diesem Weg, mit Hilfe der Fraktalen, eine mathematische Erfassung von Proportionen erreichen zu können.

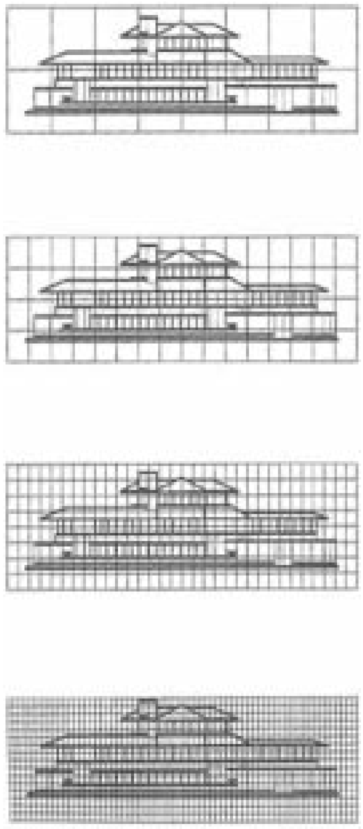
Ein weiteres Bild zeigt eine Isometrie des “Menger-Schwamm”. Er ist unendlich aus sich selbst gleichenden Elementen aufgebaut. Die Schnitte des Schwamms mit Mittellinien der Seitenflächen oder Diagonalen des Ausgangswürfels sind triadische Cantor-Mengen (s.o). Der Körper, den diese Isometrie zeigt, könnte auch als architektonisches Gebilde interpretiert werden.

Die letzten Bilder zeigen schließlich einen Entwurf, der sich unter anderem mit der architektonischen Fassung von Fraktalen beschäftigt. Es handelt sich um die sogenannte “telematische Landschaft”, einen Entwurf für die Firma Bosch auf der Expo 200 (nicht realisiert) vom Büro Brandhuber / Kniess + Partner. Das Projekt sollte ein selbständig wachsender, begehbarer Organismus sein, welcher aus vielen verschachtelten Körpern fraktal zusammengesetzt ist. Vielfältige Materialien sollten bedruckt und mit Projektionen versehen werden, reflektieren und spiegeln. So sollte der Betrachter durch Schleifenbildung und Überlagerung von Subjektivem und Objektivem zum Teil des betrachteten Systems werden.
Zwar greift dieser Entwurf ansatzweise Aspekte der Fraktalen-Forschung auf, verfolgt diese aber sehr oberflächlich und zu dem noch viel zu viele andere Aspekte, um fraktal sein zu können.

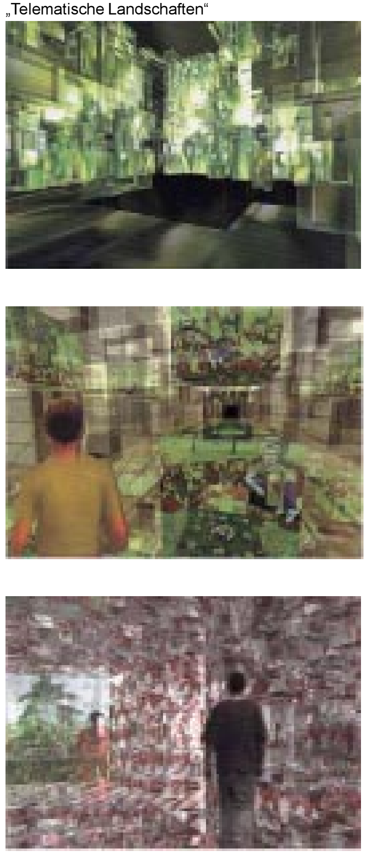

integrierte Funktionssysteme


Mengerschwamm

Box-Counting-System



„Telematische Landschaften“



„Telematische Landschaften“- Grundrisse

QUELLENNACHWEIS

GEO-Wissen 2/90
Chaos+Kreativität
Gruner+Jahr, Hamburg 1990

Kenneth J. Falconer
Fraktale Geometrie
Chichester, 1990

Klaus Lerbinger / Michael
Kuchenbuch
Faszination Fraktale
München, 1992

J.Dufner / A.Roser / F.Unseld
Fraktale und Julia-Mengen
Frankfurt a.M., 1998

Benoit B.Mandelbrot
Die fraktale geometrie der Natur
Basel, 1987

Peitgen / Jürgens / Saupe
Bausteine des Chaos – Fraktale
Hamburg, 1998

Carl Bovill
Fractal Geometry in Architecture
and Design
Boston, 1996

Arch+ 128, S48ff
Arch+ 148, S58ff